Problem:

Bei einem Fadenpendel mit der Länge l und dem Ortsfaktor g erhält man für den Auslenkungswinkel x im Bogenmaß bekannterweise die Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin(x) = 0,$$

wenn man $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ setzt. Diese DGL lässt sich nicht elementar lösen und führt bei exakter Lösung für beliebige Winkel auf ein elliptisches Integral.

Erste Näherung

Betrachtet man aber die TAYLOR-Reihe

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

so lassen sich näherungsweise Lösungen der DGL finden. Mit der Näherung $\sin(x) = x$ für kleine Amplituden erhält man die einfache DGL

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x(t) = C \cdot \sin(\omega_0 t + \delta).$$

Die Schwingung ist also näherungsweise harmonisch.

Zweite Näherung

Für größere Amplituden erscheint es sinnvoll, die nächstbessere Näherung

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

zu nehmen, was zur DGL

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0$$

führt. Etwas allgemeiner mit einem „kleinen Parameter“ μ formuliert ergibt sich [1]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu x^3 = 0.$$

Man kann nun versuchen, Lösungen der Form

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots + \mu^m x_m(t)$$

[1] Die DGL ist ein Spezialfall der DUFFING-Differenzialgleichung, die in der Chaos-Theorie eine Rolle spielt.

mit noch zu bestimmenden Funktionen x_i zu finden. Einsetzen in die DGL ergibt

$$\ddot{x}_0 + \mu\ddot{x}_1 + \mu^2\ddot{x}_2 + \ldots + \mu^m\ddot{x}_m + \omega_0^2\left(x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots + \mu^m x_m\right)$$

$$-\mu\left(x_0^3 + 3x_0^2\mu x_1 + \mu^2 \cdot r(x)\right) = 0.$$

Der Term $r(x)$ wird nicht weiter beachtet, da er insgesamt mit μ^3 in die Gleichung eingeht. Zusammengefasst nach Potenzen von μ ergibt sich

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \mu\left(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^3\right) + \mu^2\left(\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - 3x_0^2 x_1\right) + o(\mu^2) = 0$$

Experimentell ist nun bekannt, dass die Kreisfrequenz ω eine Funktion der Amplitude C ist. Ein geeigneter Ansatz ist z.B.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu e_1(C) + \mu^2 e_2(C) + o(\mu^2)$$

mit geeigneten von der Amplitude C abhängigen Funktionen e_1 und e_2. Dann ergibt sich mit

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \mu e_1(C) - \mu^2 e_2(C) + o(\mu^2)$$

schließlich

$$\ddot{x}_0 + \left(\omega^2 - \mu e_1 - \mu^2 e_2 + o(\mu^2)\right) x_0$$

$$+\mu\left(\ddot{x}_1 + \left(\omega^2 - \mu e_1 - \mu^2 e_2 + o(\mu^2)\right) x_1 - x_0^3\right)$$

$$+\mu^2\left(\ddot{x}_2 + \left(\omega^2 - \mu e_1 - \mu^2 e_2 + o(\mu^2)\right) x_2 - 3x_0^2 x_1\right) + o(\mu^2) = 0.$$

Ordnen nach Potenzen von μ liefert

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0^2 + \mu\left(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - x_0^3 - e_1 x_0\right) + \mu^2\left(\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 - 3x_0^2 x_1 - e_2 x_0 - e_1 x_1\right)$$

$$+o(\mu^2) = 0$$

Vernachlässigen von $o(\mu^2)$ und Nullsetzen aller Koeffizienten der μ-Potenzen ergibt

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\
\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= x_0^3 + e_1 x_0 \\
\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 3x_0^2 x_1 + e_2 x_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Lösung der ersten Zeile ist bekanntermaßen $x_0(t) = C\sin(\omega t + \delta)$ und kann in der zweiten Zeile eingesetzt werden:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = C^3 \sin^3(\omega t + \delta) + e_1 C \sin(\omega t + \delta)$$

Die dritte Potenz des Sinus lässt sich anders schreiben (siehe trig. Formeln):

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{3}{4} C^3 \sin(\omega t + \delta) - \frac{1}{4} C^3 \sin(3\omega t + 3\delta) + e_1 C \sin(\omega t + \delta)$$

Die einfachen Sinusterme fallen weg, wenn $e_1 C = -\frac{3}{4} C^3$ (e_1 ist ja noch unbestimmt). Aus physikalischen Gründen müssen sie wegfallen, da sie als Resonanzterme für stetig anwachsende Amplitude sorgen würden. Dagegen hat der Energiesatz etwas. Somit wird die DGL erheblich vereinfacht zu

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{1}{4} C^3 \sin(3\omega t + 3\delta).$$

Nun macht man einen Ansatz aus einem Term für die freie Schwingung und der erwungenen Schwingung (Term auf der rechten Seite der Gleichung):

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega t + \delta_1) + C_2 \sin(3\omega t + 3\delta)$$

Eingesetzt:

$$-\omega^2 C_1 \sin(\omega t + \delta_1) - 9\omega^2 C_2 \sin(3\omega t + 3\delta) + \omega^2 C_1 \sin(\omega t + \delta_1) + \omega^2 C_2 \sin(3\omega t + 3\delta)$$

$$= -\frac{1}{4} C^3 \sin(3\omega t + 3\delta)$$

Damit ergibt sich sortiert nach Sinustermen

$$\sin(\omega t + \delta_1) \left[-\omega^2 C_1 + \omega^2 C_1 \right] + \sin(3\omega t + 3\delta) \left[-9\omega^2 C_2 + \omega^2 C_2 + \frac{C^3}{4} \right] = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt für

$$-8\omega^2 C_2 + \frac{C^3}{4} = 0 \quad \text{bzw.} \quad C_2 = \frac{C^3}{32\omega^2}$$

und ergibt dann für x_1 die Lösung

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega t + \delta_1) + \frac{C^3}{32\omega^2} \sin(3\omega t + 3\delta).$$

Betrachtet man den ursprünglichen Ansatz

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + o(\mu^2),$$

so ist bereits im Term für $x_0(t)$ eine einfache Sinusfunktion enthalten. Es ist also gerechtfertigt, die Konstante C_1 zur Vereinfachung gleich Null zu setzen. Vernachlässigt man noch den Term $o(\mu^2)$, so erhält man

$$x(t) = C \sin(\omega t + \delta) + \frac{\mu C^3}{32\omega^2} \sin(3\omega t + 3\delta).$$

und

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \mu \frac{3}{4} C^2, \quad \text{weil} \quad e_1 = -\frac{3}{4} C^2.$$

Änderung der Periodendauer

Mit der anfangs vorgenommenen Verallgemeinerung durch $\mu = \frac{\omega_0^2}{6}$ erhält man

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\frac{\omega_0}{6}C^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{C^2}{8}\right)$$

und schließlich

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{C^2}{8}},$$

wobei dieser Term für kleine C noch nach $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ vereinfacht werden kann:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{C^2}{16}\right).$$

Dieser Term stimmt erstaunlicherweise mit dem Näherungsterm überein, den man nach Lösung des elliptischen Integrals erhält. Problematisch dabei ist nur, dass C nicht mehr die vollständige Amplitude der Schwingung enthält, also nur einen Näherungswert darstellt. Für die Periodendauter T erhält man mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ schließlich

$$T = \frac{T_0}{1 - \frac{C^2}{16}}.$$

Experimenteller Nachweis

Drei Fadenpendel mit den Längen $l_1 = 90\,\text{cm}$, $l_2 = 22{,}5\,\text{cm}$ und $l_3 = 10\,\text{cm}$ werden z.B. an einem Gummiband als Kopplung befestigt. Die drei Pendel besitzen also die drei Eigenfrequenzen ω_0, $2\omega_0$ und $3\omega_0$.

Versetzt man nun das längste Pendel in Schwingungen mit großer Amplitude, so zeigt das kürzeste Pendel deutliche Resonanz, was belegt, dass die dritte Harmonische bei großen Amplituden auftritt.

Quelle zur Theorie: Arno Gehrer, Nichtlineare Schwingungen
http://www.ttm.tugraz.at/ttm/arno/nichtlineare-schwingungen.pdf